

Universidad Nacional de Colombia  
Tópicos Avanzados de Lógica  
**Examen Parcial**  
Marzo de 2008

1. a) Encuentre la cuenca de Scott de  $(\mathbb{Q})$  y  $(\mathbb{R})$ .  
b) Encuentre la cuenca de Scott de  $(\mathbb{Q}, +)$  y  $(\mathbb{R}, +)$ .  
c) Encuentre la cuenca de Scott de  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, <)$  y  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, <)$ .
2. Explique por qué “ser bien ordenado” no es definible en  $L_{\infty\omega}$ . (Invoque los teoremas necesarios para su explicación.)
3. Sea  $\varepsilon_1$  el segundo punto fijo de la función  $(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$ . Demuestre que

$$\varepsilon_1 \times (\mathbb{R}^{\geq 0}, <) \approx_p^{\varepsilon_1} \omega_1 \times (\mathbb{Q}^{\geq 0}, <).$$

4. Sea  $M$  un modelo contable en vocabulario contable. Suponga que hay fórmulas  $\varphi_n$  y  $\psi_m^n$  de  $L_{\infty\omega}$  tales que  $M$  satisface la sentencia  $\sigma_M$  dada por:

$$\forall x_0 \left( \bigvee_{n < \omega} \varphi_n(x_0) \right) \wedge \bigwedge_{n < \omega} \exists x_3 \dots \exists x_{k_n} \forall x_1 (\varphi_n(x_1) \rightarrow \bigvee_{m < \omega} \forall x_2 (x_1 = x_2 \leftrightarrow \psi_m^n(x_2, x_3, \dots, x_{k_n}))).$$

Demuestre que  $M$  es el único modelo de  $\sigma_M$  (módulo isomorfismo).

5. a) El jugador  $\forall$  invita a la jugadora  $\exists$  a jugar  $EF^{\exists^{\geq \omega}}((\mathbb{Q}, \mathbb{N}), (\mathbb{N}, P))$  y  $\exists$  acepta. Después de la primera jugada de  $\forall$ ,  $\exists$  se arrepiente de haber aceptado jugar. ¿Qué puede concluir acerca de  $P$ ?  
b) Considere el juego

$$EF_{100}^{\exists^{\geq \frac{1}{2}}}(((0, \dots, 1000), \{0, \dots, 100\}), (\{0, \dots, 1000\}, \{0, \dots, 101\})).$$

¿Quién tiene estrategia ganadora?

- c) Sea  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Suponga que  $\mathfrak{A}$  es una relación de equivalencia con  $k$  clases, todas infinitas. Sea  $\mathfrak{B}$  otra relación de equivalencia con infinitas clases, todas infinitas. Demuestre que  $\mathfrak{A} \equiv_k^{\exists^{\geq \omega}} \mathfrak{B}$ .
6. Demuestre que existen  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  tales que  $\mathfrak{A} \approx_p \mathfrak{B}$  pero  $\mathfrak{A} \not\equiv_1^{\exists^{\geq \aleph_1}} \mathfrak{B}$ .